

Egy látószög - feladat ellipszisre

A feladat

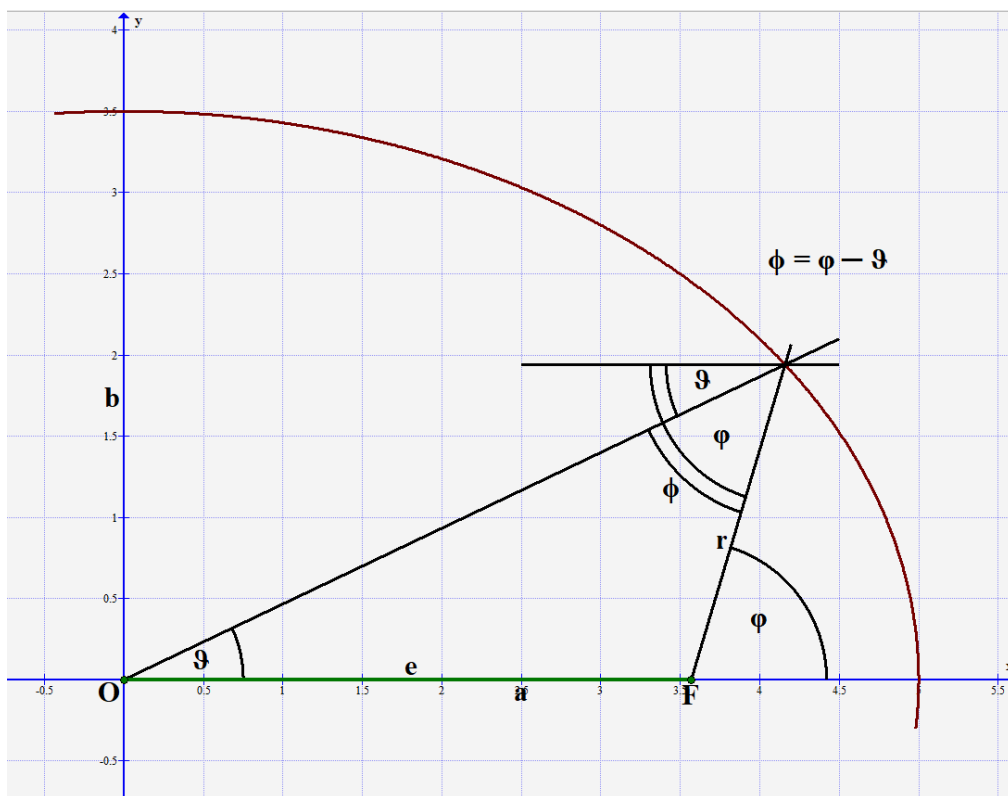
Határozzuk meg, hogy mekkora szög alatt látszik az (a, b) adatokkal adott ellipszis OF szakasza, ahol

~ O : az ellipszis centruma,

~ F : az ellipszis egyik fókusz!

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Eszerint:

$$\phi = \varphi - \vartheta . \quad (1)$$

Az 1. ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r \cdot \sin \varphi}{e + r \cdot \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\frac{e}{r(\varphi)} + \cos \varphi} \rightarrow \vartheta(\varphi) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi}{\frac{e}{r(\varphi)} + \cos \varphi} \right], \quad r > 0 . \quad (2)$$

Tudjuk, hogy – ld. pl. [1]! – :

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a + e \cdot \cos \varphi} , \quad (3)$$

így (2) és (3) - mal:

$$\vartheta(\varphi) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{\sin \varphi}{\frac{e}{b^2} + \cos \varphi}}{\frac{a + e \cdot \cos \varphi}{b^2}} \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi}{\frac{e \cdot (a + e \cdot \cos \varphi)}{b^2} + \cos \varphi} \right] , \quad (4)$$

vagy az

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (5)$$

összefüggéssel is:

$$\vartheta(\varphi) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot (a + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \cos \varphi)}{b^2} + \cos \varphi} \right] . \quad (6)$$

Most (1) és (6) - tal is:

$$\phi(\varphi) = \varphi - \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \varphi}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot (a + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \cos \varphi)}{b^2} + \cos \varphi} \right] . \quad (7)$$

E függvény ábráját mutatja a 2. ábra az $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3,5 \text{ cm}$ adatokkal.



2. ábra

Ez az összefüggés a grafikon ismerete nélkül is látható.

M2. A szélsőérték analitikus vizsgálata sok tévesztési lehetőséget tartogat; ezért is választottuk a kiértékelés grafikus módját.

M3. Eredményeink az $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3,5 \text{ cm}$ adatokra érvényesek. Más adatokkal más eredményeket kapunk.

M4. A kitűzött feladat megoldása a (7) függvény. A szélsőérték vizsgálata csak hab a tortán.

M5. Az ellipszisnek két fókusza van, így feladatunkból a másik fókusz kimaradt. A megoldás kis változtatással erre is jó. Ennek végiggondolását rábizzuk az érdeklődő Olvasóra.

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2024. 04. 30.

Továbbiak: www.galgoczi.net